The hitting times for Markov chains

毛永华

北京师范大学

2019 年 7 月 11–15 日
@
母校–吉林大学

15^{th} Workshop on Markov Processes and Related Topics

缘起：敬祝严士健先生九秩华诞！

很高兴回到七年 (1986–1993) 的母校——吉林大学

严士健先生 1992 年来吉林大学开一个短课，讲的是当时热门的无穷维粒子系统. 于是 1993 年从吉大硕士毕业后投考北师大博士，来师大后归于陈木法老师麾下，并一直伴其左右. 其时，无穷维粒子系统虽然热的发烫，物极必反，渐趋强弩之末. 用陈木法老师的话说，其根本问题还得回到有限维，甚至于一维, 遂回归 Markov 链. 所幸赶上了所谓“Markov 链的文艺复兴”（Diaconis 语）. 更重要的是，这是陈老师的根据地，不愁没饭吃. 聊以自慰，在这一广袤的根据地上，占住一个小山包，开垦出一小片自留地：在平稳性之外，研究非常返性，拟平稳性. 特别是最近关于非对称 Markov 链所展开的研究. 戏言是与陈老师“唱对台戏”，因为陈老师最近的一个得意工作是做出复矩阵的可配称性判定，及其特征值的算法. 其实，遍历性与非常返性，对称性和非对称性，都如同一枚硬币的正反面一样，是相反相成的.

内容

1. 平稳性
2. 衰减性
3. 切断（cutoff）
4. 非对称性

- 可数状态空间 E 上的离散时间或连续时间 Markov 链 X_t.
- 离散时间 Markov 链有不可约非周期的转移概率矩阵 $P=(p_{ij})$，以及 n 步转移概率矩阵 $P^t=(p_{ij}(t)), t=0,1,2,\ldots.$
- 连续时间 Markov 链（跳过程）有 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 其最小过程为 $P(t)=(p_{ij}(t)), t\geq 0.$
- 根本目标是极限

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=?$$

和相关问题.

- 可配称：

$$\pi_i p_{ij}=\pi_j p_{ji},\quad \pi_i>0.$$

可逆：可配称且 $\sum_i \pi_i=1.$

- 首中时：

$$\tau_j = \inf\{t \geq 0 : X_t = j\};$$

- 回返时：

$$\tau_j^+ = \inf\{t > \text{第一次跳} : X_t = j\},$$

其分布(列)记为 $f_{ij}(n) = \mathbb{P}_i[\tau_j^+ = n]$(离散时间)或 $f_{ij}(t) = \mathbb{P}_i[\tau_j^+ \leq t]$(连续时间).

- 基本引理：

$$p_{ij}(t) = \int_{[0,t]} p_{jj}(s)\,df_{ij}(t),$$

其 Laplace 变换 $P_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}(t)dt$:

$$P_{ij}(\lambda) = \delta_{ij}/(\lambda + q_i) + F_{ij}(\lambda)P_{jj}(\lambda). \qquad \text{(连续时间)}$$

从而对 $i \neq j$,

$$P_{jj}(\lambda) = \frac{1/(\lambda + q_j)}{1 - F_{jj}(\lambda)}, \quad P_{ij}(\lambda) = \frac{F_{ij}(\lambda)/(\lambda + q_j)}{1 - F_{jj}(\lambda)}.$$

常返性和遍历性

- 让 $\lambda \to 0$ 得到常返性判定：

$$\int_0^\infty p_{jj}(t) = P_{jj}(0) = \infty \Leftrightarrow f_{jj}(\infty) = P_j[\tau_j^+ = \infty] = 0.$$

- 如果常返，那么 $\lim_{\lambda\to 0} F_{jj}(\lambda) = 1$, 于是得到遍历性：

$$\pi_j := \lim_{t\to\infty} p_{jj}(t) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda P_{jj}(\lambda) = 1/q_j \mathbb{E}_j \tau_j^+.$$

- 初步结论：

$$\lim_{t\to\infty} p_{jj}(t) = \begin{cases} 0, & \text{非常返或零常返;} \\ \pi_j > 0, & \text{正常返.} \end{cases}$$

衰减速度

- 指数衰减：在 Laplace 变换下关系式

$$P_{jj}(\lambda) = \frac{1/q_j}{1 - F_{jj}(\lambda)}$$

中考虑 $\lambda < 0$ 使得 $F_{jj}(\lambda) < 1$, 即考虑修正的回返时：

$$\tau_j^+ I_{\tau_j^+ < \infty}]$$

指数阶矩.

- 受此启发，可以考虑其他衰减问题：代数阶衰减，不同尺度下的衰减.
- 一般状态空间上 Markov 链的衰减的 Lyapunov 判断准则：
  毛永华; Song, Yan-Hong: On geometric and algebraic transience for discrete-time Markov chains. Stochastic Process. Appl. 124 (2014)

遍历速度：跳过程

- 从回返时的指数阶矩有限得到速度速度，即假设

$$\mathbb{E}_j e^{\epsilon \tau_j^+} < \infty.$$

- 对连续时间 Markov 链，再假设过程可逆：

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji},$$

那么谱隙 $\lambda_1 \geq \epsilon$，或者

$$||P(t) - \pi||_{L^2(\pi)} \leq e^{-\epsilon t}.$$

- 更多的故事是将单点的首中时（回返时）换成一个集合.

毛永华; Xia，LH: Spectral gap for jump processes by decomposition method. Front. Math. China 4 (2009).

- 离散时间和连续时间会不一样. 如果假定 P 可逆而且非负定，那么结论是平行的. 否则，只假定可逆，情况大不一样.
- 一个补救方法是先考虑 P^2(必然非负定)，再回到 P. 于是下面的关系是需要的：
- 令 $\tilde{\tau}_j^+(\tilde{\tau}_j)$ 分别是 P^2 的回返时和首中时. 再令 $\tilde{f}_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i[\tilde{\tau}_j^+ = n]$,

$$\tilde{F}_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{2n}\tilde{f}_{ij}^{(n)}, \; F_{ij}^{(0)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{2n} f_{ij}^{(2n)}, \; F_{ij}^{(1)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{2n-1} f_{ij}^{(2n-1)}.$$

则

$$\tilde{F}_{ij}(s) = F_{ij}^{(0)}(s) + F_{ij}^{(1)}(s) F_{jj}^{(1)}(s) \left[1 - F_{jj}^{(0)}(s)\right]^{-1}.$$

- 于是 P 的收敛半径 $\leq 1/\sup\left\{s : F_{jj}^{(0)}(s) < 1\right\} < 1$.

毛永华: Convergence rates for reversible Markov chains without the assumption of nonnegative definite matrices. Sci. China Math. 53 (2010),

- Markov 链 P 的强遍历收敛速度 $\alpha(P)$：

$$\alpha(P) = \inf\left\{\epsilon \le 1 : \exists C < \infty \text{ 使得 } \sup_{i\in E}\sum_{j\in E}|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \le C\epsilon^n\right\}.$$

- 下面的重整化公式将速度速度从指数遍历过渡到强遍历：

$$\sum_{k\in E}|p_{ik}^{(n)} - \pi_k| \le 2\mathbb{P}_i[\tau_j > n] + \sum_{m=1}^{n}\sum_{k\in E}|p_{jk}^{(n-m)} - \pi_k| f_{ij}^{(m)},$$

- 对跳过程，仍然假设 P 可逆且非负定，那么从

$$\sup_{i\in E}\mathbb{E}_i\tau_j \le M < \infty$$

导出 $\alpha(P) \le e^{-1/M}$.

毛永华：Convergence rates in strong ergodicity for Markov processes. Stochastic Process. Appl. 116 (2006)

拟平稳分布

- 设 Markov 链 X_t 具有生命时 ζ，其 (拟) 平稳分布 u 定义为：

$$\mathbb{P}_u[X_t = i | t < \zeta] = u_i.$$

如果 $\zeta = \infty$ a.e. 则 u 即是平稳分布. 如果 $\zeta < \infty$ a.e. 则 u 称为拟平稳分布.

- Yaglom 极限 (1947)：

$$\mathbb{P}_i[X_t = i | t < \zeta] \to ?$$

- 一般而言，不可约的遍历的 Markov 链有唯一的平稳分布；而对不可约（非常返）Markov，其拟平稳分布或者不存在，或者有唯一一个，或者无穷多个.
- 三个问题：存在性与唯一性；吸引域，收敛速度.

P. Collet, S. Martinez, J. San Martin, Quasi-Stationary Distributions, 2013.

生灭过程

- 若 $R=\infty$，$S=\infty$, 当 $a_0>0$ 时, 生命时 ζ 即 -1 的首中时. 在衰减参数 $\lambda_0>0$ 的前提下，van Doorn 证明对每个 $0<x\le\lambda$, 有一个拟平稳分布.
- 若 $R=\infty$，$S<\infty$, 相应的 Q 过程依然唯一. 当 $a_0>0$ 时, van Doorn 证明过程存在唯一的拟平稳分布.
- 如果 $R<\infty$，即相应的 Q 过程非唯一，会发生什么?
- 借助于可数状态空间生灭过程的首中时分布的谱表示，我们证明另外两种边界（$R<\infty, S\le\infty$）下的最小生灭过程具有唯一的拟平稳分布.
- 后三种情况的吸引域和收敛速度问题也容易解决; 第一种知之甚少!
- 找到一类双边生灭过程，在衰减参数 λ_0 处存在一族拟平稳分布.
  Gao，WJ; 毛永华: Quasi-stationary distribution for the birth-death process with exit boundary. J. Math. Anal. Appl. 427 (2015)
  毛永华; Mei,TX: Quasi-stationary distribution for a class of bilateral birth-death processes. preprint (2019)

切断（cutoff）

- 切断（cutoff）现象是指一族 Markov 过程在收敛于其平稳态时所发生的切断行为。给定一个遍历的 Markov 链 $P(t) = (p_{ij}(t))$, 具有平稳分布 π. 对任意距离 D, 如果

$$\lim_{t\to\infty} D(P(t), \pi) = 0,$$

则可以称之为 D 遍历性。

- 当研究的对象是一族 Markov 链，如 $\mathbb{P}^{(n)}(t), n \geq 1$, 会发生如下的现象。假定 Markov 链 $P^{(n)}(t)$, 各有平稳分布 $\pi^{(n)}$。若存在 t_n 使得

$$\lim_{n\to\infty} D(P^{(n)}(ct_n), \pi^{(n)}) = \begin{cases} 0, & \text{if } c > 1; \\ 1, & \text{if } c < 1. \end{cases}$$

此现象被 Persi Diaconis 称之为切断（CUTOFF).

Diaconis, P：The cutoff phenomenon in finite Markov chains. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 93（1996）

分离度（separation）与随机单调

- D 选取分离度 (separation): $\mathrm{sep}(P(t),\pi) := \sup_{ij}(1-p_{ij}(t)/\pi_j)$. 如果有停时 T 使得

$$P_i[T>t] = \sup_j (1-p_{ij}(t)/\pi_j),$$

那么 T 称为最快强平稳时. 我们需要 T 的分布，或更简单，因为

$$\mathrm{sep}(P^{(n)}(ct_n),\pi^{(n)}) = P_i[T^{(n)} > ct^{(n)}],$$

所以只需要一阶矩和二阶矩.

- 对于状态空间 $E=\{0,1,\cdots,d\}$ 上的随机单调过程，强平稳时可以转化为首中时和回返时：

$$\mathbb{E}_0 e^{-\lambda T} = \frac{\lambda P_{0,d}(\lambda)}{\pi_d} = \frac{F_{0,d}(\lambda)}{\pi_d(\lambda+q_d)G_{d,d}(\lambda)},$$

其中 $G_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-f_{ij}(t))dt$.

毛永华; 张余辉: Separation cutoff for upward skip-free chains. J. Appl. Probab. 53 (2016)

全变差和最优耦合

- D 选取全变差: $||P(t)-\pi||_{\mathrm{Var}} = \sup_i \sum_j |p_{ij}(t)-\pi_j|$. 如果有停时 T 使得

$$P_i[T>t] = \sum_j |p_{ij}(t)-\pi_j|,$$

那么 T 称最优耦合时间. 我们同样需要 T 的分布表示给出一阶矩和二阶矩.

- 利用最优耦合的存在性

- $K=(K_{ij})_{i,j\in V}$ 是转移矩阵, 关于概率测度 π 可逆, 即:

$$K_{ij}\geq 0,\quad \sum_j K_{ij}=1,\quad \pi_i K_{ij}=\pi_j K_{ji}.$$

- 再令 P 为另一转移矩阵, 以 π 为平稳分布:

$$\sum_i \pi_i P_{ij}=\pi_j.$$

- 一般的, 假定 P 不可逆, 而 K 是 P 的可逆部分:

$$K_{ij}=\frac{1}{2}\left[P_{ij}+P^*_{ij}\right],\quad P^*_{ij}=\frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}.$$

对称 Markov 链：电网络与常返性

- 令 $a_{ij} = \pi_i p_{ij}$ 为电阻率，而 $r_{ij} = 1/a_{ij}$ 为电阻.
- 令 $\tilde{f}$ 下述付出的解：

$$\begin{cases} Pf(i) = f_i, & i \neq a, b; \\ f(a) = 1, f(b) = 0. \end{cases}$$

则 $c_{ij} = a_{ij}(\tilde{f}_i - \tilde{f}_j)$ 即为电流. 此即所谓 Ohm 定律.

- 定义电容量 $\mathrm{Cap}_{a,b} = \pi_a P_a[\tau_a^+ > \tau_b]$. 可逆 Markov 链的 Dirichlet 原理变为

$$\mathrm{Cap}_{a,b} = \inf\left\{\frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}(f_j - f_i)^2 : f_a = 1, f_b = 0\right\}$$

在 $\tilde{f}$ 处达到. 此即所谓电学的 Thompson 原理.

Doyle, Snell: Random walks and electric networks

- 令 $\tilde{f}^*$ 为下面对偶过程 P^* 的方程的唯一解：

$$\begin{cases} P^* f(i) = f_i, & i \neq a, b; \\ f_a = 1, f_b = 0. \end{cases}$$

- Gaudillière-Landim(2014) 将 Thompson 原理推广到不可逆情形：对任意点对 $i \neq j$,

$$\mathrm{Cap}_{a,b} = \inf\{(f, (I-P)(I-K)^{-1}(I-P)^* f)_\pi : f_a = 1, f_b = 0\}$$

在 $(\tilde{f} + \tilde{f}^*)/2$ 处达到.

- 而由 $T_{ij} (= \mathbb{E}_i \tau_j + \mathbb{E}_j \tau_i) = 1/\mathrm{Cap}_{ij}$，得到

$$T_{ij}(P) \leq T_{ij}(K), \quad T_0(P) := \sum_{ij} T_{ij} \leq T_0(K).$$

Gaudillière, A. and Landim, C. A Dirichlet principle for non reversible Markov chains and some recurrence theorems. Prob. Theory Relat. Fields 158（2014）

- Poisson 方程: 令 $L_c = I - e^{-c}P$, 其中 (势) $c \geq 0$. 我们考虑两类广义的 Poisson 方程：一类是带边界的:

$$\begin{cases} L_c f = \phi, & \text{on} \quad A^c; \\ f = \xi, & \text{on} \quad A \end{cases}$$

另一类是无边界的：

$$Lf = \phi - \pi(\phi),$$

其中 π 是平稳分布。

- 对相应的对偶过程，同样令 $L_c^* = I - e^{-c^*}P^*$ 和 $L^* = L_0^*$.
- 给出关于

$$D_c(f, f^*) = (L_c f, f^*)_\pi = (f, L_c^* f^*)_\pi$$

的变分公式。

Huang, Lu-Jing; 毛永华: Variational principles of hitting times for non-reversible Markov chains, JMAA, 2018

谢谢!